TD S1 - Corrigé

S1- Système {masse + ressort} horizontal

1) Syst : masselotte M(m)

Ref : $\mathcal{R}$, labo, galiléen

BDF :

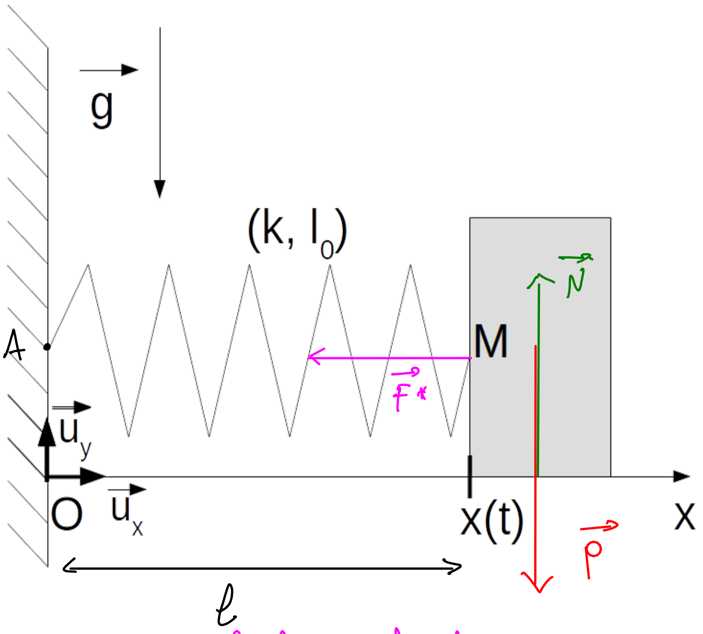
- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$
- réaction normale $\vec{N} = N\vec{u_y}$
- frottements $\vec{f} = \vec{0}$
- tension du ressort :

$\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u_x}$

↑ car $\vec{AM}$ et $\vec{u_x}$ colinéaire de m̂ sens.

avec $l = x$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -k(x-l_0)\vec{u_x}}$



* en supposant $l > l_0$ sur la figure

2) 2e loi de Newton appliquée à M dans $\mathcal{R}$ galiléen :

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u_x}$ (mvt uniquement selon $\vec{u_x}$)

d'où :

$$m\ddot{x}\vec{u_x} = -k(x-l_0)\vec{u_x} - mg\vec{u_y} + N\vec{u_y} + \vec{0} \quad (*)$$

$(\vec{u_x},\vec{u_y})$ base orthogonale donc :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -k(x-l_0) & (1) \\ 0 = -mg + N & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow \boxed{N = mg}$ ici la réaction normale du support compense le poids.

(1) $\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0$. On pose $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 l_0}$ (*) Equation d'un oscillateur harmonique non amorti de pulsation propre $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$[\ddot{x}] = L.T^{-2} \Rightarrow [\omega^2 x] = L.T^{-2} \Leftrightarrow [\omega^2] = \frac{L.T^{-2}}{[x]} = \frac{LT^{-2}}{L} = T^{-2}$

$\Leftrightarrow \underline{[\omega] = T^{-1}}$

3/ $x(t) = C + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ est-elle solution ?

On calcule indépendamment les membres de gauche et de droite de l'équation différentielle (*) pour savoir s'ils sont égaux.

$\ddot{x} + \omega^2 x = ?$

Calculons $\ddot{x}$: $\dot{x} = -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \underbrace{\ddot{x}}_{L.T^{-2}} = -\underbrace{\omega^2}_{T^{-2}}\underbrace{A}_{L}\cos(\omega t) - \underbrace{\omega^2}_{T^{-2}}\underbrace{B}_{L}\sin(\omega t)$$ ✓ homogène !

Calculons $\omega^2 x$: $\omega^2 x = \omega^2 C + \omega^2 A\cos(\omega t) + \omega^2 B\sin \omega t$.

D'où : $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 C$.

Ainsi $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 l \Leftrightarrow \omega^2 C = \omega^2 l_0 \Leftrightarrow \boxed{C = l_0}$

On reconnaît la position d'équilibre $C = l_0 = x_{eq}$ de l'oscillateur harmonique.

On a montré que $\forall t \geq 0$, $x(t) = l_0 + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ est solution de l'équation du mouvement.

4/ Déterminons A et B.

A, B = ctes d'intégration.

CI et relations de continuité à $t=0$ donnent :

* continuité de la position x à $t=0$:

$x(0^+) = x(0^-)$ avec $x(0^+) = l_0 + A\cos(0) + B\sin(0) = l_0 + A$.

$x(0^-) = l_0 + a$. (C.I.)

$$\Rightarrow l_0 + A = l_0 + a \Leftrightarrow \boxed{A = a.}$$

* continuité de la vitesse $\dot{x}$ à $t=0$:

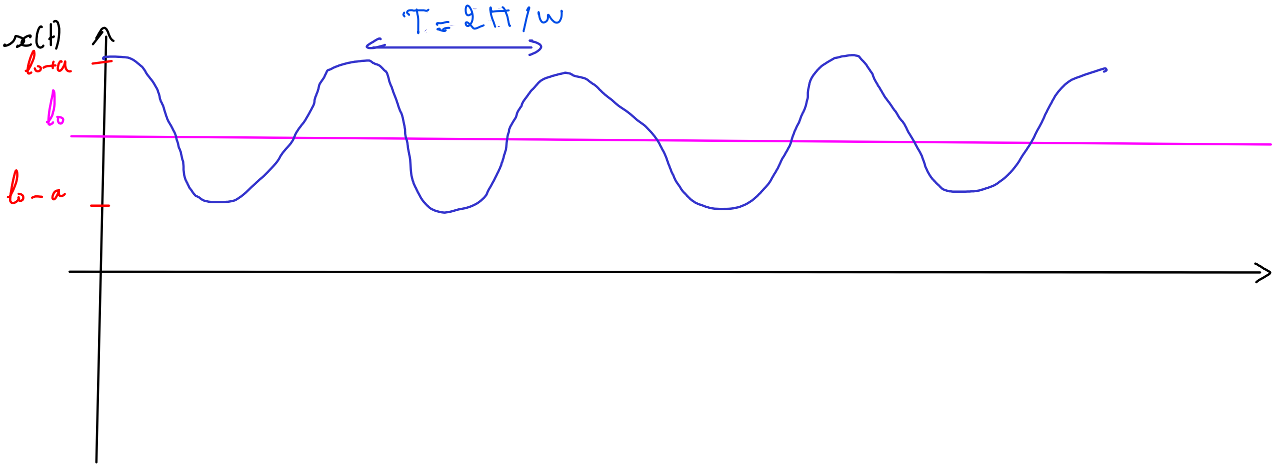
$\dot{x}(0^+) = \dot{x}(0^-)$

Pour calculer $\dot{x}(0^+)$, il faut calculer $\dot{x}(t)$: $\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

donc $\begin{cases} \dot{x}(0^+) = -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) = B\omega \\ \dot{x}(0^-) = 0 \quad (\text{C.I.}) \end{cases}$

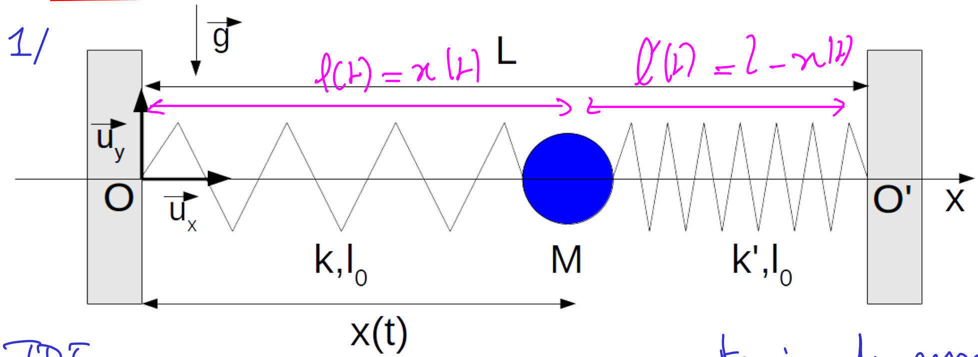
$$\Rightarrow B\omega = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = 0}$$

Solution complète compte-tenu des C.I. : $\boxed{x(t) = l_0 + a\cos(\omega t)}$



S2 - Oscillateur à 2 ressorts

1/



Syst : M(m)

Réf : R, labo, galiléen

IDF :

- poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$
- réact° normale $\vec{N} = N\vec{u_y}$
- tension du ressort de gauche : $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_x}$
  avec $\ell = x(t)$: $\vec{T} = -k(x - \ell_0)\vec{u_x}$
- tension du ressort de droite : $\vec{T'} = +k'(\ell' - \ell_0)\vec{u_x}$
  avec $\ell' = L - x(t)$: $\vec{T'} = +k'(L - x - \ell_0)\vec{u_x}$

RFD appliqué à M dans R :

$m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{T'}$. Projection sur $\vec{u_x}$: $m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) + k'(L - x - \ell_0)$

d'où :

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k+k'}{m}}_{\omega_0^2} x = \frac{k\ell_0 + k'(L - \ell_0)}{m}$$

On reconnait l'équation d'un O.H. de pulsat° propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k'+k}{m}}}$

Pos d'équilibre ? $x = x_{eq} \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x_{eq} = \frac{k\ell_0 + k'(L - \ell_0)}{k+k'}}$.

homogène ✓
cas particulier $k = k'$
$\Rightarrow x_{eq} = \frac{L}{2}$ cohérent ✓

Finalement : $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}}$

2/ $$\overset{L}{x(t)} = \overset{L}{x_{eq}} + \overset{\emptyset}{\underset{L}{a}\cos(\omega_0 t)} + \overset{\emptyset}{\underset{L}{b}\sin(\omega_0 t)}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k+k'}{m}}$

a ? b ?

Continuité de la position à $t = 0$:

$x(0^-) = x(0^+)$ avec $\begin{cases} x(0^-) = x_{eq} \\ x(0^+) = x_{eq} + a \end{cases}$

$\Longleftrightarrow x_{eq} = x_{eq} + a$

$\Longleftrightarrow \underline{a = 0}$

Continuité de la vitesse à $t = 0$:

$\dot{x}(0^-) = \dot{x}(0^+)$ avec : $\dot{x}(t)$, $t > 0$

$\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + b\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$\Longrightarrow \dot{x}(0^+) = b\omega_0$

$\dot{x}(0^-) = v_0$

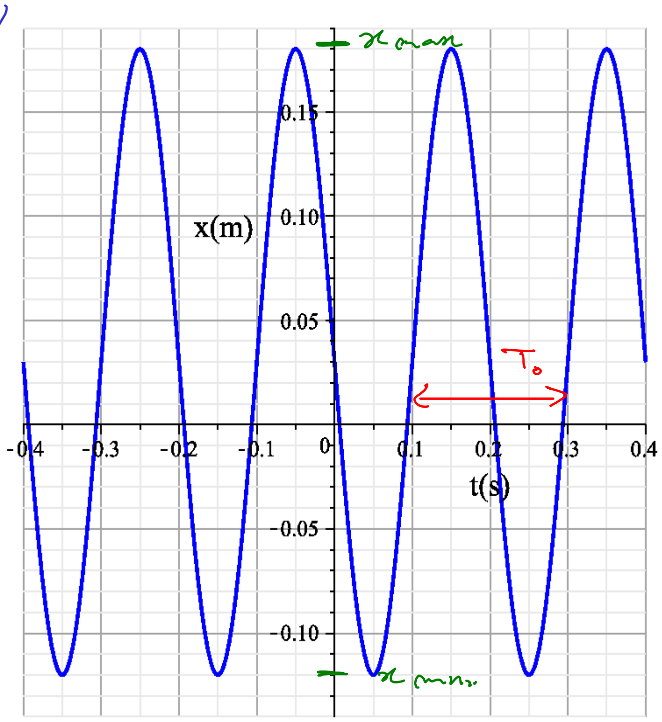
$\Longrightarrow v_0 = b\omega_0$

$\Longrightarrow \underline{b = \frac{v_0}{\omega_0}}$

L — L.T^{-1} — T^{-1}

D'où : $\boxed{x(t) = x_{eq} + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$

3/



* $T_0 = 0{,}2\ s \Rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = 5\ Hz$

* Amplitude $A = \frac{v_0}{\omega_0}$

$2A = x_{max} + x_{min}$

$\Longrightarrow A = \frac{1}{2}(x_{max} - x_{min})$

A.N. $A = \frac{1}{2}(0{,}18 - 0{,}12)$

$A = 0{,}15\ m$

* $x_{max} = x_{eq} + A$

$\Longrightarrow x_{eq} = x_{max} - A$

A.N. : $x_{eq} = 0{,}18 - 0{,}15$
$= 0{,}03\ m$

v_0 ?

$A = \frac{v_0}{\omega_0} \Longrightarrow v_0 = A\omega_0 = A \times 2\pi \times f_0$

A.N. : $v_0 \approx 0{,}15 \times 6 \times 5$
$\approx 4{,}5\ m.s^{-1}$

S3 - Amplitude maximale d'oscillation

1) $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$

$E_m \overset{\uparrow}{=} E_m(t=0) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k (\ell(t=0) - \ell_0)^2$

conservation

avec $v_0 = 0{,}5\ m.s^{-1}$

$\ell(t=0) = \ell_0 + d$, $d = 15 \times 10^{-2}\ m$

$$\left(E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k d^2 \right.$$ ← $E_m(t=0)$

A.N. : $m = 500 g$, $k = 30 . N m^{-1}$

$E_m \sim \frac{1}{2} \times (0{,}5 \times (0{,}5)^2 + 30 \times (0{,}15)^2)$

$E_m \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}, 0{,}125 + 30 \times 0{,}0225 \sim 0{,}07 \right) \sim 0{,}4\ J$

2) Allongement maximal : $\Delta\ell_m \rightarrow v = 0 \Rightarrow E_c = 0$

Conservation de E_m :

$0 + \frac{1}{2} k \Delta\ell_m^2 = E_m$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta\ell_m = \sqrt{\frac{2E_m}{k}}}$$

On doit avoir : $\Delta\ell_m > d$

E_m qd l' allongement est $\max$